

Das Geheimnis hinter Ramanujans Konstante

oder

Warum ist $e^{\pi\sqrt{163}}$ so nah an einer ganzen Zahl?

Eine Reise von Euler über Heegner-Zahlen zur j -Funktion

Mike Winkler

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Germany

mike.winkler@ruhr-uni-bochum.de

7. Juni 2026

Zusammenfassung

Die Zahl

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743.99999999999925\dots$$

liegt verblüffend nahe an der ganzen Zahl

$$262\,537\,412\,640\,768\,744 = 640\,320^3 + 744.$$

Dieser Artikel zeigt, warum das keine numerische Zauberei ist, sondern eine konkrete Konsequenz der komplexen Multiplikation, der Klassenzahl des imaginär-quadratischen Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ und der Fourier-Entwicklung der modularen j -Funktion. Dabei wird bewusst nicht nur das Resultat genannt, sondern der Weg dorthin in vielen Zwischenschritten entfaltet. Den Schluss bildet ein kurzer Blick auf die berühmte Chudnovsky-Formel für π , in der dieselbe Zahl 640 320 erneut auftaucht.

1 Ein Auftakt, der nach Zufall aussieht

Die Zahl

$$e^{\pi\sqrt{163}}$$

gehört zu den sogenannten *almost integers*, also zu Zahlen, die keine ganzen Zahlen sind, ihnen aber extrem nahekommen. Sie ist auch unter der Bezeichnung *Ramanujans Konstante* bekannt [3]. Numerisch erhält man

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743.99999999999925007259\dots$$

und damit

$$e^{\pi\sqrt{163}} - (640\,320^3 + 744) = -7.4992740280181431112 \cdot 10^{-13} \dots$$

Die Abweichung von der nächsten ganzen Zahl liegt also weit unter einem Billionstel. Das ist genau die Art von Phänomen, die in populären Darstellungen zunächst wie eine Sensation aussieht und erst danach mathematisch aufgelöst wird.

Auch der populäre Name hat seine eigene kleine Geschichte. Die Bezeichnung *Ramanujans Konstante* ist historisch nämlich nicht ganz sauber. Ramanujan hat die spezielle Beinahe-Identität mit $e^{\pi\sqrt{163}}$ offenbar gar nicht formuliert, während Hermite die besondere Rolle von 163 bereits 1859 bemerkte. Der heute verbreitete Terminus wurde nach einer oft zitierten Anekdote erst viel später geprägt – MathWorld zufolge von Simon Plouffe – und hängt mit einem Aprilscherz von Martin Gardner in *Scientific American* aus dem Jahr 1975 zusammen. Gardner stellte dort spaßeshalber die Behauptung in den Raum, Ramanujan habe exakt diese Ganzzahligkeit vermutet, und löste den Scherz erst einige Monate später wieder auf [3]. Für die Mathematik ist das nebensächlich, aber für die Kulturgeschichte des Themas sollte es nicht unerwähnt bleiben.

An dieser Stelle lohnt es sich, eine falsche Erwartung sofort zu zerstreuen. Es gibt *keinen* elementaren Trick, der direkt aus der Exponentialfunktion erklärt, warum ausgerechnet $e^{\pi\sqrt{163}}$ fast ganzzahlig ist. Die Erklärung führt vielmehr in ein Gebiet, in dem quadratische Zahlkörper, Klassenzahlen, komplexe Multiplikation und Modulfunktionen zusammentreffen.

2 Warum taucht ausgerechnet die Zahl 163 auf?

Ein erster Hinweis führt erstaunlich weit zurück, nämlich zu Eulers berühmtem Polynom

$$f(n) = n^2 + n + 41.$$

Für $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$ liefert dieses Polynom nur Primzahlen:

$$41, 43, 47, 53, \dots, 1601.$$

Erst bei $n = 40$ scheitert das Muster, denn dann ist

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 41^2.$$

Warum ist dieses Polynom hier überhaupt erwähnenswert? Wegen seiner Diskriminante. Die Gleichung

$$n^2 + n + 41 = 0$$

hat die Lösungen

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{-163}}{2}.$$

Damit erscheint dieselbe Zahl 163 bereits auf sehr elementarer Ebene. Tatsächlich ist der Zusammenhang noch tiefer. Das Euler-Polynom $n^2 + n + 41$ steht mit der Heegner-Zahl $163 = 4 \cdot 41 - 1$ in direkter Verbindung. Allgemein hängt das Phänomen, dass Polynome der Form $n^2 + n + p$ ungewöhnlich lange Primzahlfolgen erzeugen, mit den Diskriminanten $1 - 4p$ und damit mit Heegner-Zahlen zusammen [6].

Für unseren Artikel ist das vor allem als *Motivationsbrücke* wichtig. Die eigentliche Erklärung der Beinahe-Ganzzahligkeit kommt erst später. Aber die Zahl 163 ist nicht vom Himmel gefallen. Sie steht schon im Hintergrund des klassischen Primzahlphänomens von Euler [3, 6].

3 Heegner-Zahlen und Klassenzahl eins

Betrachten wir den imaginär-quadratischen Körper

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-163}).$$

Sein Ganzheitsring ist

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-163}}{2} \right].$$

Für diesen Körper gilt etwas Außergewöhnliches: Seine Klassenzahl ist gleich 1 [6]. Anders formuliert: Die Idealklassengruppe ist trivial. In jedem Ganzheitsring eines Zahlkörpers zerfällt jedes von null verschiedene Ideal eindeutig in Primideale. Die Klassenzahl misst, ob diese Ideale immer durch einzelne Elemente erzeugt werden können. Klassenzahl 1 bedeutet, dass jedes Ideal ein Hauptideal ist. In diesem Fall erhält man für den Ring selbst wieder eine eindeutige Zerlegung in Primelemente.

Die positiven quadratfreien Zahlen d , für die $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ Klassenzahl 1 besitzt, heißen *Heegner-Zahlen*. In dieser populären Konvention bezeichnet man also die positiven Zahlen d selbst als Heegner-Zahlen. Äquivalent kann man auch von den zugehörigen Heegner-Diskriminanten

$$-3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163$$

sprechen. Es gibt genau neun positive Heegner-Zahlen:

$$1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.$$

Die Zahl 163 ist die größte dieser neun Zahlen [3, 6].

Dass diese Liste endlich ist und tatsächlich genau so aussieht, ist ein tiefer Satz der algebraischen Zahlentheorie. Heegner veröffentlichte 1952 einen Beweis dieser Liste, der zunächst skeptisch aufgenommen wurde. Unabhängige Beweise wurden später von Stark und Baker gegeben. Erst danach wurde Heegners ursprünglicher Ansatz allgemein anerkannt [6]. Für unsere Geschichte ist vor allem eines entscheidend: Klassenzahl 1 heißt, dass der zugehörige singuläre Modul später tatsächlich ein *ganzer* Wert sein wird. Genau dieses Integritätsphänomen macht aus einer bloßen numerischen Auffälligkeit eine strukturelle Aussage [5, 6].

4 Der eigentliche Protagonist: die modulare j -Funktion

Nun kommt die Funktion ins Spiel, die das ganze Rätsel erklärt. Für τ in der oberen Halbebene setzt man

$$q = e^{2\pi i\tau}.$$

Dann besitzt die modulare j -Funktion die Fourier- bzw. Laurent-Entwicklung

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots$$

Das ist zunächst nur eine Reihe, aber eine Reihe von enormer arithmetischer Bedeutung [4].

Der entscheidende Punkt ist nun die Wahl

$$\tau_{163} = \frac{1 + \sqrt{-163}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{163}}{2}.$$

Dafür gilt

$$q = e^{2\pi i\tau_{163}} = e^{\pi i} e^{-\pi\sqrt{163}} = -e^{-\pi\sqrt{163}}.$$

Wenn wir also

$$\varepsilon = e^{-\pi\sqrt{163}}$$

setzen, dann ist

$$q = -\varepsilon, \quad \varepsilon \approx 3.8089809370 \cdot 10^{-18}.$$

Das ist bereits der erste große Effekt: $|q|$ ist derart klein, dass in der q -Entwicklung von j praktisch alles vom führenden Term q^{-1} dominiert wird.

Setzt man $q = -\varepsilon$ ein, so erhält man formal

$$j(\tau_{163}) = -\varepsilon^{-1} + 744 - 196884\varepsilon + 21493760\varepsilon^2 - 864299970\varepsilon^3 + \dots$$

Da aber $\varepsilon^{-1} = e^{\pi\sqrt{163}}$, wird daraus

$$j(\tau_{163}) = -e^{\pi\sqrt{163}} + 744 - 196884e^{-\pi\sqrt{163}} + 21493760e^{-2\pi\sqrt{163}} - \dots$$

Damit ist der entscheidende Mechanismus bereits sichtbar. Wenn $j(\tau_{163})$ eine ganze Zahl ist, dann muss $-e^{\pi\sqrt{163}} + 744$ fast ganzzahlig sein, weil die restlichen Terme winzig klein sind.

5 Warum ist $j(\tau_{163})$ ganzzahlig?

An dieser Stelle tritt die Theorie der *singulären Moduli* auf. Werte der Form $j(\tau)$ mit imaginär-quadratischem τ heißen singuläre Moduli. Ein Grundsatz der komplexen Multiplikation sagt, dass solche Werte algebraische ganze Zahlen sind und ihre Galoistheorie

von der Klassenzahl des entsprechenden imaginär-quadratischen Körpers gesteuert wird [4, 5, 6].

Konkret betrachtet man für eine negative Diskriminante D das sogenannte Hilbert-Klassenpolynom

$$H_D(X) = \prod_Q (X - j(\tau_Q)),$$

wobei das Produkt über reduzierte positiv definite binäre quadratische Formen der Diskriminante D läuft. Der Grad dieses Polynoms ist gerade die Klassenzahl $h(D)$.

Für $D = -163$ gilt nun

$$h(-163) = 1.$$

Also hat $H_{-163}(X)$ Grad 1. Deshalb gibt es nur *einen* singulären Modul zu dieser Diskriminante, und dieser ist nicht bloß algebraisch, sondern tatsächlich eine ganze Zahl. Der konkrete Zahlenwert entsteht aus dem zugehörigen Hilbert-Klassenpolynom. Da $h(-163) = 1$ ist, degeneriert dieses Polynom zu

$$H_{-163}(X) = X + 640\,320^3,$$

und seine einzige Nullstelle ist daher der singuläre Modul. Klassisch lautet die exakte Identität

$$j\left(\frac{1 + \sqrt{-163}}{2}\right) = -(640\,320)^3.$$

Damit ist die geheimnisvolle Zahl 640 320 plötzlich nicht mehr geheimnisvoll. Sie ist im Hilbert-Klassenpolynom und damit im singulären Modul für die Diskriminante -163 eingebaut [4, 5, 6].

Bemerkung. Oft wird diese Tatsache in populären Darstellungen als das eigentliche “Wunder” verkauft. In Wahrheit ist sie das Resultat einer sehr starren Struktur. Die Klassenzahl 1 zwingt das Hilbert-Klassenpolynom auf Grad 1, und für $D = -163$ besitzt dieses Polynom die einzige Nullstelle $-(640\,320)^3$.

6 Die Rechnung, die das Rätsel auflöst

Jetzt setzen wir die exakte Identität für $j(\tau_{163})$ in die q -Entwicklung ein. Aus

$$j(\tau_{163}) = -e^{\pi\sqrt{163}} + 744 - 196884e^{-\pi\sqrt{163}} + 21493760e^{-2\pi\sqrt{163}} - \dots$$

und

$$j(\tau_{163}) = -(640\,320)^3$$

folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} e^{\pi\sqrt{163}} &= 640\,320^3 + 744 - 196884e^{-\pi\sqrt{163}} + 21493760e^{-2\pi\sqrt{163}} \\ &\quad - 864299970e^{-3\pi\sqrt{163}} + \dots \end{aligned}$$

Das ist bereits die gesuchte Erklärung. Die Zahl $e^{\pi\sqrt{163}}$ liegt deshalb so nahe an der ganzen Zahl $640\,320^3 + 744$, weil sie *genau* diese ganze Zahl plus eine sehr kleine Korrektur ist.

Man kann die ersten Korrekturterme explizit abschätzen:

$$e^{-\pi\sqrt{163}} \approx 3.8089809370 \cdot 10^{-18},$$

also

$$196884e^{-\pi\sqrt{163}} \approx 7.4992740280 \cdot 10^{-13},$$

und weiter

$$21493760e^{-2\pi\sqrt{163}} \approx 3.1183868722 \cdot 10^{-29}.$$

Der lineare Fehlerterm ist also von Größenordnung 10^{-13} , der quadratische schon von Größenordnung 10^{-29} und der kubische noch viel kleiner. Damit erhält man praktisch sofort

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 640\,320^3 + 744 - 0.0000000000000749927\dots,$$

also genau die beobachtete Beinahe-Ganzzahligkeit.

Proposition 1. *Mit $\varepsilon = e^{-\pi\sqrt{163}}$ gilt*

$$e^{\pi\sqrt{163}} - (640\,320^3 + 744) = -196884\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Begründung. Die Aussage ist die vorangehende exakte Entwicklung, nach dem ersten nichtverschwindenden Korrekturterm abgeschnitten. Da $\varepsilon = e^{-\pi\sqrt{163}} \approx 3.8 \cdot 10^{-18}$ ist, folgt unmittelbar, dass der erste quadratische Beitrag bereits von Größenordnung 10^{-29} ist und damit für die sichtbare Genauigkeit keine Rolle mehr spielt.

7 Warum die Erklärung tiefer ist als die bloße Rechnung

Bis hierhin könnte man versucht sein zu sagen: “Gut, dann ist die Sache eben nur eine clevere Reihenentwicklung.” Aber das greift zu kurz. Die eigentliche Tiefe steckt in der Frage, *warum* der singuläre Modul gerade an dieser Stelle ganzzahlig ist.

Dazu müssen drei Ebenen zusammenkommen:

1. Die Zahl $\tau_{163} = \frac{1+i\sqrt{163}}{2}$ ist ein imaginär-quadratischer Punkt, also ein Punkt mit komplexer Multiplikation.
2. Für solche Punkte sind die Werte der j -Funktion algebraische ganze Zahlen.
3. Im Fall der Diskriminante -163 ist die Klassenzahl gleich 1, also degeneriert das Hilbert-Klassenpolynom zu einem linearen Polynom. Darum wird der singuläre Modul nicht bloß algebraisch, sondern tatsächlich ganzzahlig [5, 6].

Erst *dieses* Zusammenspiel erklärt die numerische Nähe. Die Exponentialfunktion liefert nur den riesigen Hauptterm $q^{-1} = -e^{\pi\sqrt{163}}$. Die Zahlentheorie sorgt dafür, dass dieser Hauptterm durch einen ganzzahligen modularen Wert fast exakt kompensiert wird.

Anders ausgedrückt: Die fast ganzzahlige Gestalt von $e^{\pi\sqrt{163}}$ ist ein Schatten der Klassenzahl-1-Situation von $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$.

8 Ein kurzer Seitenblick auf π

Die Geschichte endet nicht bei einer kuriosen Fast-Ganzzahl. Dieselbe Heegner-Zahl 163 taucht auch in einer der berühmtesten Formeln zur Berechnung von π auf, nämlich in der Chudnovsky-Formel

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640\,320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 640\,320^{3k}}.$$

Hier erscheint also dieselbe Zahl 640 320 wieder, und zwar nicht zufällig. Sie kommt erneut aus dem singulären Modul zur Diskriminante -163 [2].

Gerade dieser Zusammenhang ist in neuerer Literatur weiter ausgebaut worden. Campbell hat 2024 eine Ramanujan-artige Reihe speziell zur Heegner-Zahl 163 untersucht, eine von Bagis und Glasser vermutete Formel bewiesen und dabei die Verbindung zur Chudnovsky-Theorie ausdrücklich herausgearbeitet. Besonders bemerkenswert ist die numerische Beschleunigung. In Campbells Darstellung liefert die Bagis–Glasser-Formel etwa 32 Dezimalstellen pro Summand, während der klassische Chudnovsky-Algorithmus etwa 14 Stellen pro Summand liefert. Grob gesagt beruht diese stärkere Beschleunigung darauf, dass der modulare Konvergenzfaktor in der Bagis–Glasser-Formel nochmals verstärkt wird [1].

Hinter der “fast ganzen” Zahl $e^{\pi\sqrt{163}}$ steht also genau dieselbe modulare Struktur, die auch zu extrem schnellen π -Formeln führt.

9 Fazit

Die Aussage

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 640\,320^3 + 744$$

ist also keine isolierte numerische Kuriosität. Sie ist die sichtbare Spitze eines ganzen Gebirges aus algebraischer Zahlentheorie und Modulfunktionen.

Der Ablauf ist im Kern erstaunlich klar:

1. Die Zahl 163 ist eine Heegner-Zahl, also ein Diskriminantenfall mit Klassenzahl 1.
2. Daher ist der singuläre Modul

$$j\left(\frac{1 + \sqrt{-163}}{2}\right)$$

eine ganze Zahl. Klassisch sogar genau $-(640\,320)^3$.

3. Die Fourier-Entwicklung von j beginnt mit $q^{-1} + 744 + \dots$.
4. Für $\tau = \frac{1+i\sqrt{163}}{2}$ ist $q = -e^{-\pi\sqrt{163}}$, also $q^{-1} = -e^{\pi\sqrt{163}}$.
5. Weil $|q|$ winzig klein ist, bleiben nach dem Hauptterm nur verschwindend kleine Korrekturen übrig.

Genau deshalb liegt $e^{\pi\sqrt{163}}$ so unfassbar nah an einer ganzen Zahl. Nicht, weil hier ein Zufall waltet, sondern weil die Theorie an dieser Stelle ungewöhnlich starr ist.

Literatur

- [1] Campbell, John M. *On a Ramanujan-type series associated with the Heegner number 163*. Journal of Number Theory **259** (2024), 322–329. Verfügbar unter <https://arxiv.org/abs/2402.08485>.
- [2] Chudnovsky, David V. und Chudnovsky, Gregory V. *Approximations and complex multiplication according to Ramanujan*. In: *Pi: A Source Book*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3240-5_63.
- [3] Weisstein, Eric W. *Ramanujan Constant*. From MathWorld—A Wolfram Resource. Verfügbar unter <https://mathworld.wolfram.com/RamanujanConstant.html>.
- [4] Zeff, Avi. *Notes on the Gross–Zagier formula: the case $N = 1$, on singular moduli*. Lecture notes, University of California, Berkeley. Verfügbar unter <https://math.berkeley.edu/~avizeff/notes/GZ-sm.pdf>.
- [5] Gross, Benedict H. und Zagier, Don B. *On singular moduli*. Journal für die reine und angewandte Mathematik **355** (1985), 191–220. Verfügbar unter <https://doi.org/10.1515/crll.1985.355.191>.
- [6] Cox, David A. *Primes of the Form $x^2 + ny^2$: Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication*. 2. Auflage. Wiley, Hoboken, 2013. Autorensseite: <https://dacox.people.amherst.edu/primes.html>.